Gibt es die Zahl i ?

Bei der Einführung der komplexen Zahlen tritt bei vielen Schülern und auch bei manchen Lehrern ein gewisses Unbehagen auf. Das weist auf nicht zufriedenstellend gelöste methodische und didaktische Probleme hin.

Ohne Zweifel hängen diese Schwierigkeiten mit der Frage der Existenz mathematischer Objekte zusammen. Wenn die Existenzproblematik eine derart wichtige Rolle spielt, dann erscheint es plausibel, sie offen und radikal (bis zur Wurzel!) im Zusammenhang mit den komplexen Zahlen zu erörtern.

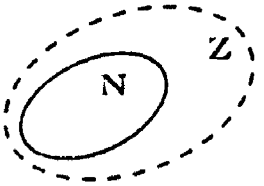
In der dargestellten Unterrichtssequenz steht nicht das E r g e b n i s , sondern der P r o z e ß der Begriffsbildung im Vordergrund: Nicht kristallklare, feststehende Wahrheiten werden gesammelt, sondern Schülerantworten - im Gespräch und auf Fragebögen - werden diskutiert. Die schöpferische Kritik bei ersten tastenden Versuchen und das Abenteuer der Auseinandersetzung wird in den Unterricht einbezogen.

1.Stunde:

Das Folgende soll das schrittweise Entstehen eines Tafelbildes veranschaulichen und als Diskussionsgrundlage dienen. Die Diskussion erfolgt zunächst in Kleingruppen (pro Gruppe etwa 4 Schüler, Dauer: 10 bis 15 Minuten), danach im Plenum der ganzen Klasse:

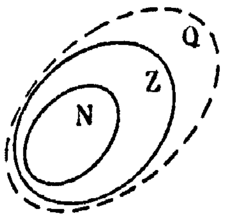
Die Gleichung $x+3=7$ ist lösbar in N.

Die Gleichung $x+8=2$ ist nicht lösbar in N, aber lösbar in Z.

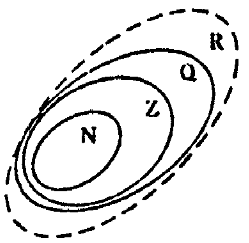


Für einen Volksschüler ist diese Gleichung unlösbar, da er nur natürliche Zahlen kennt. Für ihn "existiert" nur N, er kann sich eine "Lösung" dieser Gleichung nicht vorstellen.

Die Gleichung $3x+2=7$ ist nicht lösbar in N und Z, aber lösbar in Q.

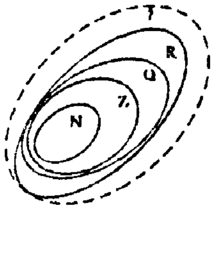


Die Gleichung $x^2=2$ ist nicht lösbar in N, Z und Q, aber lösbar in R.



Für die Griechen der Antike war diese Gleichung unlösbar. Sie kannten nur rationale Zahlen, für irrationale Zahlen hatten sie keine entsprechende Schreibweise. Sie konnten sich eine solche "Lösung" nicht vorstellen.

Die Gleichung $x^2=-1$ ist nicht lösbar in N, Z, Q und R., denn aus $x>0$ oder $x<0$ folgt $x^2>0$ und $x=0$ folgt $x^2=0$; also ergibt sich stets $x^2\geq 0$.



Kann es eventuell eine "Lösung" außerhalb der Menge der reellen Zahlen geben?

Gibt es "Zahlen" außerhalb der Menge der reellen Zahlen R? Wir können uns in diesem Augenblick "Lösungen" von Gleichungen, die nicht in R liegen, nicht vorstellen! Aber auch Volksschüler können sich z.B. eine Lösung der Gleichung $x+8=2$ beziehungsweise $8+?=2$ nicht vorstellen, da sie nur die Menge N kennen. Hat die Tatsache, daß sich die Volksschüler eine Lösung dieser Gleichung nicht vorstellen können, irgendeine Bedeutung für die Existenz dieser Lösung? Ist es analog dazu von Bedeutung für die Existenz, ob wir uns Lösungen der Gleichung $x^2=-1$ vorstellen können? Oder hinkt der Vergleich zwischen den Volksschülern und uns; gibt es da vielleicht prinzipielle Unterschiede?

Hausübung nach der ersten Stunde: Text 1 durchlesen, Fragebogen 1 beantworten.

☐ ***Text 1***

Sollte es außerhalb von *R* "Lösungen" der Gleichung $x^2=-1$ geben, so werden wir diese "Lösungen" auch wieder als "Zahlen" bezeichnen. Wir wollen "einstweilen" (sollte es so etwas überhaupt geben!) eine "Zahl", die Lösung der Gleichung $x^2=-1$ ist, mit i bezeichnen, da wir ja noch nicht wissen, wie die "Zahlen" des neuen (*R* umfassenden) Bereiches geschrieben werden sollen. Wir können nicht erwarten, daß sie sich jemals als Dezimalzahlen werden schreiben lassen: Jede Dezimalzahl ist ja eine reelle Zahl! Wir können i als "vorläufigen" Namen ansehen. Ähnlich hat die Kreiszahl 3,14159... den Buchstaben π als Namen. Allerdings besteht hier ein fundamentaler Unterschied: Wir glauben, daß die Kreiszahl 3,14159... existiert und geben diesem Existierenden den Namen π; Von der Lösung der Gleichung $x^2=-1$ wissen wir nicht, ob sie existiert, und geben dem möglicherweise Nicht-Existierenden einen Namen. Aber in anderen Bereichen des täglichen Lebens ist es ja ähnlich: Heinzelmännchen, Hexen, Zentauren und Nixen gibt es ja möglicherweise (oder sogar sicher!) auch nicht! Trotzdem gibt es Namen dafür. Jedoch ist auf alle Fälle zu beachten: Mit dem vorläufigen Namen i für die "Zahl" ist natürlich noch nicht geklärt, ob es eine solche "Zahl" überhaupt gibt.
Sollte es diese "Zahl" aber geben, so wird man wohl verlangen müssen, daß i+i=2i, 2i+i=3i, 7i+4i=11i, allgemein ai+bi=(a+b)i mit a,b aus *N*, ja sogar mit a,b aus R^+; verlangt man auch 0i=0 und 9i-6i= 9i+(-6)i=3i, dann gilt ai+bi=(a+b)i sogar für a,b aus *R*. Außerdem wird man verlangen, daß 2.3i=6i, allgemein a.bi=(ab)i und $2i.5i=10i^2=10.(-1)=-10$, allgemein $ai.bi=(ab)i^2=ab.(-1)=-ab$ gilt für a,b aus *R*. Als Spezialfall folgt daraus: $(-i).(-i)=(-1)i.(-1)i=1i^2=1.(-1)=-1$

Das heißt, die Gleichung $x^2=-1$ hätte außer i noch eine zweite Lösung, nämlich -i. Gäbe es die "Zahl" i und könnten wir mit dieser Zahl "rechnen", wie gerade angedeutet, so würden auch noch weitere Gleichungen "lösbar", zum Beispiel $x^2=-4$

Da $(\pm 2i)^2=(\pm 2i).(\pm 2i)=4i^2=4.(-1)=-4$ wäre, hätte $x^2=-4$ die zwei Lösungen 2i,-2i. Aber auch Gleichungen wie $x^2-2x+5=0$ würden lösbar, denn:
$x^2-2x+5=0 \mid -4$
$x^2-2x+1=-4$
$(x-1)^2=-4$
daraus folgt
$x-1=2i$ oder $x-1=-2i \mid +1$
$x=1+2i \quad x=1-2i$
Die Lösungen lauten also 1+2i, 1-2i.

Wie man leicht überlegen kann, würden damit sogar überhaupt alle quadratischen Gleichungen lösbar. Ist das nicht merkwürdig?
Weitere Beispiele:
$x^2-4x+29=0$, $x^2+6x+73=0$, $x^2-14x+50=0$, $2x^2-2x+5=0$
Alle quadratischen Gleichungen haben "Lösungen" von der Gestalt a+bi mit a,b aus *R*.

Man kann sich nun kaum vorstellen, daß diese "Zahlen", abgesehen davon, daß sie als "Lösungen" von Gleichungen auftreten, irgendeinen Nutzen haben könnten! Dazu folgendes Beispiel:

$$
\begin{aligned}
(2+i)(2-i)(3+2i)(3-2i) &= (2+i)(3+2i)(2-i)(3-2i)\\
(4+2i-2i-i^2)(9+6i-6i-4i^2) &= (6+3i+4i+2i^2)(6-3i-4i+2i^2)\\
(4+1)(9+4) &= (4+7i)(4-7i)\\
5.13 &= 16+28i-28i-49i^2\\
5.13 &= 16+49\\
65 &= 65
\end{aligned}
$$

wobei $5=2^2+1^2$, $13=3^2+2^2$, $65=4^2+7^2$ ist

Nicht jede natürliche Zahl läßt sich als Summe von zwei Quadraten schreiben, zum Beispiel $2=1^2+1^2$, $10=3^2+1^2$, $29=5^2+2^2$, aber $3=1^2+1^2+1^2$, $7=2^2+1^2+1^2+1^2$, usw.

Obiges Beispiel ist deshalb bemerkenswert! Es läßt sich nämlich ganz allgemein zeigen:

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) &= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di) \\
(a^2+abi-abi-b^2i^2)(c^2+cdi-cdi-d^2i^2) &= (ac+bci+adi+bdi^2)(ac-bci-adi+bdi^2) \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= [(ac-bd)+(ad+bc)i][(ac-bd)-(ad+bc)i] \\
(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2
\end{aligned}
$$

Diese Formel besagt: Multipliziert man natürliche Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lassen, miteinander, so läßt sich das Produkt wieder als Summe zweier Quadratzahlen schreiben. In der Formel tritt i gar nicht auf! Wer weiß aber, ob wir ohne die "Zahl" i auf diesen Zusammenhang gekommen wären, obwohl dies natürlich durchaus möglich ist.

Zweite Stunde

Wieder wird in Kleingruppen über den Text diskutiert und im Plenum eine Zusammenschau versucht. Die Diskussion soll diesmal die Nützlichkeit der neuen "Zahlen" als Schwerpunkt haben: Könnte es sein, daß sich manche Formeln unter Verwendung der "Zahl" i einfacher herleiten lassen als ohne diese "Zahl"? Was meinst Du: Werden Zahlen erfunden oder entdeckt?

Hausübung nach der zweiten Stunde: Text 2 durchlesen, Fragebogen 2 beantworten.

☐ ***Text 2***

Verstehen wir eigentlich, was wir hier tun? Wahrscheinlich nicht! Ist es, um "richtig" zu rechnen, allerdings notwendig, zu verstehen, was man tut? Man würde glauben: Ja! Versteht zum Beispiel ein Computer, was er tut? Sicher nicht! Rechnet er richtig? Im allgemeinen schon! Also ist das Verständnis nicht unbedingte Voraussetzung für richtiges Rechnen. Man kann das rein mechanische, formale Rechnen also durchaus beherrschen, ohne zu begreifen, was man eigentlich tut. Wir wollen uns auf dieser Stufe des rein formalen Rechnens noch etwas umsehen. Wir versuchen, mit den neuen "Zahlen" so zu rechnen wie ein Computer - nämlich ohne Verständnis. Wir wissen ja noch immer nicht, ob es solche "Zahlen" überhaupt gibt. Wir haben doch bisher nur einen Namen eingeführt.

Um uns leichter vorstellen zu können, was formales Rechnen bedeutet, denken wir uns unseren eigenen Taschenrechner um einige Tasten erweitert; wir bräuchten zum Beispiel die Taste [i]. Tippen wir [3] [+] [4] [*] [i] ein, so könnten wir uns vorstellen, daß in der Anzeige 3+4i erscheint. Ist eine Anzeige in dieser Form jedoch "ökonomisch"? Um die Frage, was eine "ökonomische" Anzeige ist, diskutieren zu können, betrachten wir ein analoges Beispiel im Bereich der reellen Zahlen auf unserem Rechner. Wir versuchen 784 000 000 einzugeben; das geht zunächst nicht, die Leuchtanzeige ist dafür zu "kurz". Man kann aber 784 000 [*] 1 000 eingeben; im Rechner befindet sich nun die Zahl 784 000 000. Was wird jedoch angezeigt? 7,84 08 Was heißt das? $7{,}84 \cdot 10^8$. Die Anzeige ist "ökonomisch"!

Beispiele:

Eingegebene Zahl	Anzeige
$7{,}84.10^8$	7,84 08
$2{,}1.10^{19}$	2,1 19
$5{,}347.10^{47}$	5,347 47

Die gleichbleibenden Teile der eingegebenen Zahl werden nicht angezeigt! Wie soll nun unser erdachter Computer die "neuen" Zahlen anzeigen?

Beispiele:

Eingegebene Zahl	Anzeige
4+7i	4 7
9+2i	
3-5i	
-7+6i	
-5-3i	
4i	
i	
3	

Ergänze die Anzeigenspalte!

Obwohl in der ersten Tabelle $7{,}84.10^8$ eine einzige reelle Zahl ist, wird sie in der Anzeige des Rechners durch ein Paar reeller Zahlen (7,84 08) dargestellt. Ebenso soll in der zweiten Tabelle 4+7i nur eine "neue Zahl" bedeuten. In der Anzeige erscheint auch hier ein Zahlenpaar, nämlich (4 | 7). Unser erdachter Computer zeigt also jede "neue Zahl" als ein Paar (alter) reeller Zahlen an!

Daß neue Zahlen als Paare alter Zahlen geschrieben werden ist nichts ungewöhnliches und nichts neues. Auch eine Bruchzahl, zum Beispiel $\frac{2}{3}$, kann ja als Zahlenpaar aufgefaßt werden, bestehend aus zwei alten, ganzen Zahlen, dem Zähler 2 und dem Nenner 3. Man hat sich nur schon daran gewöhnt, in $\frac{2}{3}$ nicht mehr das Zahlenpaar (alter Zahlen) sondern "die neue Zahl" - die Bruchzahl - zu sehen.

Wir könnten nun die Computeranzeige zum Anlaß nehmen, neben der Schreibweise 4+7i die Paarschreibweise (4|7) für die neuen "Zahlen" einzuführen. Schlimmstenfalls könnte man ja die gleichbleibenden Teile der "Zahl" auf das Plastik- bzw. Blechgehäuse des Computers schreiben. Weitere Beispiele: 3+8i = (3|8), 5-2i = (5|-2), 9i = (0|9), i = (0|1), usw. Auch die "alten" reellen Zahlen erhalten damit eine zusätzliche (Computer-) Schreibweise, z.B.: 7 = (7|0), -5 = (-5|0). Allgemein müßte gelten: a+bi = (a|b) für alle a,b aus R. Da nun den Paaren (a|b) aus R^2 (nach Einführung eines Koordinatensystems) die Punkte einer Ebene umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können, wäre es also möglich, die neuen "Zahlen" als Punkte einer Ebene zu veranschaulichen. Man könnte in diesem Fall von einer "Zahlenebene" - nicht mehr wie bisher von einer "Zahlengeraden" - sprechen.

3. Stunde:

Diskussion in anders als bisher zusammengesetzten Kleingruppen über die neue Schreibweise und die Zahlenebene. Im Plenum wird nach der Zusammenfassung noch folgendes Beispiel behandelt:

Veranschauliche die "Zahlen" (0|0), (1|0), (2|-3), (3|0), (3|4), (2|1) in der "Zahlenebene" und bezeichne die erhaltenen Punkte der Reihe nach mit A, B, C, D, E, F. Man erhält eine "Figur" in der Ebene (besonders deutlich wird dies, wenn man aufeinanderfolgende Punkte durch Strecken verbindet). Addiere zu jeder der sechs "Zahlen" die "Zahl" (4|3) und veranschauliche auch die Ergebnisse in der "Zahlenebene". Bezeichne die Ergebnispunkte der Reihe nach mit A', B', C', D', E', F'. Fällt Dir etwas auf?

Hausübung nach der dritten Stunde: Beispiel: Multipliziere jede der sechs "Zahlen" A, B, C, D, E, F des Schulübungs-Beispiels mit der Zahl a) (1|2) = 1+2i nach dem Vorbild: $(3+4i)(1+2i)=3+4i+6i+8i^2=3+4i+6i+8(-1)=-5+10i$, b) (2|0) = 2, c) (0|1) = i. Veranschauliche die Ergebnisse (Produkte) in der "Zahlenebene" (auf Transparentpapier zeichnen). Bezeichne die Ergebnispunkte wieder mit A', B', C', D', E', F'. Fällt Dir etwas auf? Fragebogen 3 beantworten.

4. Stunde:

Diskussion im Plenum der ganzen Klasse über das Hausübungsbeispiel (Erkennen der Drehstreckung!), weitere Beispiele auf Overhead-Folie, Besprechen von Schülerantworten auf die Fragebögen 1 und 2.

Hausübung nach der vierten Stunde: Text 3 durchlesen. Fragebogen 4 beantworten.

☐ ***Text 3***

Die vergangenen vier Stunden sollten es ermöglichen, am Beispiel der sogenannten komplexen Zahlen die Entwicklung eines neuen Begriffes zu erleben. Anhand des Erweiterungsschrittes von den reellen zu den komplexen Zahlen sollte gezeigt werden, wie der Begriff der komplexen Zahlen entsteht und wie sich dabei auch der bisherige Zahlbegriff verändert. Im selben Maß sollte jedoch auch die Problematik der Existenz mathematischer Gegenstände aufgewiesen und "erfahren" werden. Charakteristisch für einen solchen Lehrgang ist dabei, daß Mathematik nicht nur betrieben wird, sondern daß auch über sie gesprochen wird.

Die Absicht war nicht, jemanden von der Existenz der komplexen Zahlen zu überzeugen, sondern vielmehr darzustellen, daß es mit der Frage der Existenz mathematischer Objekte (wie zum Beispiel der Zahlen, auch der "alten" reellen Zahlen) nicht so einfach ist. Es sollte also die Frage der Existenz mathematischer Objekte selbst problematisiert werden - die komplexen Zahlen dienen dabei eigentlich nur als Mittel zum Zweck.

Vorrangig geht es gar nicht darum (aber doch auch), ob die komplexen Zahlen existieren, sondern darum, darüber nachzudenken, was das Wort "existieren" in der Mathematik überhaupt bedeutet. Man sollte also gar nicht versuchen, die Frage: "Existieren die komplexen Zahlen?" zu beantworten, solange noch nicht klargestellt ist, was die Frage meint. In allen Wissenschaften ist es ebenso schwer, die "richtigen" Fragen zu stellen, wie Antworten darauf zu finden.

Heutzutage ist unter der Mehrzahl der Mathematiker die Ansicht verbreitet, daß für die Existenz mathematischer Objekte zwei Forderungen erfüllt sein müssen:

1) Die Existenz der betreffenden Objekte darf zu keinem Widerspruch führen.

2) Die Annahme der Existenz der Objekte muß zweckmäßig und nützlich sein.

Die Bedeutung des Wortes "Existenz" wird hier also präzise erläutert, ist dadurch aber (nicht nur in der Mathematik, sondern wohl auch in anderen Bereichen) nicht ein- für allemal festgelegt.

Außer dem Begriff der Existenz muß natürlich auch erklärt - definiert - werden, was man unter komplexen Zahlen verstehen soll:

Definition: Eine Menge C heißt Menge der komplexen Zahlen, wenn a) in dieser Menge "weitgehend so wie mit reellen Zahlen gerechnet" werden kann, b) die Menge R der reellen Zahlen in C enthalten ist, c) das Rechnen in R ein Spezialfall des Rechnens in C ist, d) es ein Element i aus C gibt, sodaß $i^2=-1$ ist und e) alle Elemente von C sich in der Form a+bi darstellen lassen, wobei a,b aus R sind.

Die folgenden zwölf Gesetze präzisieren noch, was man unter "weitgehend wie mit reellen Zahlen rechnen" zu verstehen hat:

1) Je zwei Elementen A,B und der Operation + wird ein eindeutig bestimmtes Element C zugeordnet. Wir schreiben: C=A+B und nennen C Summe von A und B

2) Je zwei Elementen A,B und der Operation . wird ein eindeutig bestimmtes Element D zugeordnet. Wir schreiben: D=A.B und nennen D Produkt von A und B

3) A+B=B+A gilt für alle Elemente A,B

4) A.B=B.A gilt für alle Elemente A,B

5) (A+B)+C=A+(B+C) gilt für alle Elemente A,B,C

6) (A.B).C=A.(B.C) gilt für alle Elemente A,B,C

7) (A+B).C=A.C+B.C gilt für alle Elemente A,B,C

8) Zu je zwei Elementen A,B gibt es genau ein Element X, sodaß A+X=B gilt. Dieses Element nennen wir B-A (Differenz von A und B)

9) Es gibt genau ein Element O, sodaß A+O=A für jedes Element A gilt

10) Zu je zwei Elementen A,B gibt es genau ein Element Y, sodaß A.Y=B gilt. Dieses Element nennen wir B/A (Quotient von A und B; dabei ist vorausgesetzt, daß A nicht gleich O ist)

11) Es gibt genau ein Element 1, sodaß A.1=A für jedes Element A gilt. Das Element 1 ist vom Element O verschieden.

12) A.B=O gilt nur dann, wenn A=O oder B=O ist.

Erfüllt eine Menge K mit den Operationen + und . diese zwölf Gesetze, so heißt K ein Körper.

Beispiele: *Q*,*R* sind Körper; *N* ist kein Körper (z.B.: Gesetz 8 gilt nicht); *Z* ist kein Körper (z.B.: Gesetz 10 gilt nicht)

Damit ist nun auch definiert, was unter komplexen Zahlen verstanden werden soll. Die Existenzfrage ist allerdings noch immer nicht geklärt. Denn wer sagt denn, daß eine Menge C mit den in der Definition geforderten Eigenschaften widerspruchsfrei denkbar ist? Und Existenz bedeutet Nützlichkeit und Widerspruchsfreiheit.

Die Nützlichkeit der komplexen Zahlen wurde in den vergangenen Stunden zumindest angedeutet. (Lösungen von quadratischen Gleichungen, vorteilhafte Herleitung mancher Formel, Schiebungen und Drehstreckungen in der Zahlenebene, usw.) Es bleibt also nur noch die Frage der Widerspruchsfreiheit offen. Um diese Frage zu beantworten, hatte der irische Mathematiker W.R.HAMILTON (1805-1865) folgende geniale Idee: Er konstruierte Objekte, welche die oben genannten Forderungen erfüllten. Dabei ging er von den ("harmlosen") reellen Zahlen aus, das heißt: Er setzte R und R^2 (die Menge der geordneten Paare reeller Zahlen) als existent voraus. Das erscheint den meisten Menschen unproblematisch, obwohl dies ganz und gar nicht der Fall ist. Für die Paare reeller Zahlen führte er eine "Addition" und eine "Multiplikation" "willkürlich" ein: $(a|b) \oplus (c|d)=(a+c|b+d)$ und $(a|b) \odot (c|d)=(ac-bd|ad+bc)$

Die "Addition" und die "Multiplikation" (vor allem!) sehen wirklich ziemlich "willkürlich" aus, waren aber natürlich angeregt durch:
$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ und $(a+bi).(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$

HAMILTON konnte daraufhin zeigen, daß die Menge der reellen Zahlenpaare mit diesen Rechenoperationen alle Forderungen erfüllt, wenn man die Paare (a|0) mit den reellen Zahlen a identifiziert und das Paar (0|1) gleich i setzt. Die Widerspruchsfreiheit der komplexen Zahlen war damit nachgewiesen, oder besser gesagt, auf die Widerspruchsfreiheit der reellen Zahlen zurückgeführt.

5. Stunde:

Diskussion über den Text: "Genügen Dir Widerspruchsfreiheit und Nützlichkeit als Existenzkriterien?" zuerst in Kleingruppen, dann im Plenum.

Hausübung nach der fünften Stunde: Wie berechnet man den Streckfaktor und den Drehwinkel in den Beispielen der letzten Hausübung? Fragebogen 5 beantworten.

☞ Fragebogen 1:

Bitte beantworte die folgenden Fragen so ausführlich und ehrlich wie möglich!

1) Was erschien Dir persönlich als das Wichtigste an dieser Stunde?

2) Was, glaubst Du, wollte der Lehrer in den Mittelpunkt der Stunde stellen?

3) Interessiert Dich das angeschnittene Thema?

4) Wie gefällt Dir eine Mathematikstunde, die in der durchgeführten Art gestaltet ist?

5) Glaubst Du - jetzt, nach der ersten Stunde - , daß solche "neuen Zahlen" existieren? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?

6) Welche Eigenschaften der Dir bekannten Zahlen (der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen Zahlen) hältst Du für besonders wichtig?

7) Was hat Dir am meisten mißfallen?

8) Hast Du Verbesserungsvorschläge? Welche?

☞ Fragebogen 2:

1) Was erschien Dir persönlich als das Wichtigste an dieser Stunde?

2) Was, glaubst Du, wollte der Lehrer in den Mittelpunkt der Stunde stellen?

3) Hat sich an Deiner Vorstellung der "neuen Zahlen" in dieser Stunde etwas geändert? Wenn ja, versuche es zu beschreiben!

4) Versuche den Unterschied zwischen Zahlen und Zahlschreibweise zu formulieren!

5) Werden Zahlen erfunden oder entdeckt oder beides? Was meinst Du dazu?

6) Was hat Dir an dieser Stunde am meisten mißfallen?

7) Hast Du Verbesserungsvorschläge? Welche?

☞ Fragebogen 3:

1) Was erschien Dir persönlich als das Wichtigste an dieser Stunde?

2) Was, glaubst Du, wollte der Lehrer in den Mittelpunkt der Stunde stellen?

3) Was hältst Du nun von den "neuen Zahlen"? Hat sich an Deiner Vorstellung in dieser Stunde wieder etwas geändert?

4) Was hältst Du von einer "Zahlenebene"? Oder bist Du eher der Meinung, Zahlen "müssen" auf einer Zahlengeraden liegen?

5) Kannst Du in einem Paar reeller Zahlen "eine einzige neue Zahl" sehen? Ist es Dir möglich, in einer Bruchzahl als Paar ganzer Zahlen den analogen Fall zu sehen? Oder würdest Du diesen Vergleich ablehnen?

6) Findest Du beim Haus- bzw. Schulübungsbeispiel etwas bemerkenswert? Formuliere Deine Gedanken in Worten! Kannst Du vielleicht auch weiterführende Vermutungen aussprechen und eventuell auch begründen?

7) Weitere Bemerkungen?

☞ *Fragebogen 4:*

1) Was erschien Dir persönlich als das Wichtigste an dieser Stunde?

2) Was, glaubst Du, wollte der Lehrer in den Mittelpunkt der Stunde stellen?

3) Was hältst Du davon, daß die "neuen Zahlen" in der "Zahlenebene" Drehungen, Streckungen und Schiebungen verursachen?

4) Ein Schüler sagt: "Ich glaube, er wollte vor allem, daß wir nicht so 'eingezäunt' denken und uns auch andere Perspektiven eröffnen." Was meinst Du dazu?

5) Wo haben wir uns zu lang aufgehalten? Was könnten wir uns noch einmal und sorgfältiger und genauer ansehen?

6) Nach dem Lesen des neuen Textes: Was meinst Du dazu, wenn man sagt, daß es in der Mathematik üblich ist, die Existenz von Objekten anzunehmen, sofern dies nützlich ist und zu keinem Widerspruch führt? Genügt Dir das?

7) Hättest Du eine Idee, wie man die Existenz von abstrakten Objekten auf andere Art definieren könnte? Versuche zu formulieren, was für Dich beim Begriff 'Existenz' besonders wichtig ist!

8) Weitere Bemerkungen?

☞ *Fragebogen 5:*

1) Was erschien Dir persönlich als das Wichtigste an dieser Stunde?

2) Was, glaubst Du, wollte der Lehrer in den Mittelpunkt der Stunde stellen?

3) In den letzten fünf Mathematikstunden wurde eine große Zahl von Fragen und Problemen aufgeworfen. Meinst Du, daß Du in diesen Stunden viel oder wenig gelernt hast?

4) Würdest Du gern öfter, statt Mathematik zu betreiben, über Mathematik reden? Findest Du das wichtig oder eher unwichtig?

5) Welche der Bildungsziele aus dem Lehrplanauszug sind für Dich besonders wichtig?

6) Gib, bitte, eine verbale Gesamtbeurteilung über die letzten fünf Mathematikstunden ab!

7) Weitere Bemerkungen?

Einige der Schülerantworten:

Zu 1/5:

- Ich glaube schon, es ist schließlich alles möglich.

- Ja, warum würden wir uns sonst solche Mühe geben, das herauszufinden, wenn wir am Ende nur wissen, daß es sie nicht gibt?

- Allein, daß wir eine Stunde dafür opfern, beweist die Existenz der Zahlen.

- Ich glaube schon, nur wird man, wenn man in der herkömmlichen Art an die Aufgabe herangeht, zu keiner Lösung kommen. Man muß ganz anders denken.

- Ja, weil wenn sich ein Problem stellt ($x^2=-1$), muß es irgendeine Lösung geben. Nur, wo ist es aus? Hören die Probleme irgendwann auf? Oder die Lösungen?

- Ja, ich glaube, daß solche Zahlen existieren, weil alles, was wir vorstellen können und was wir uns überlegen, in uns und für uns zu existieren anfängt. Außerdem ist Existenz bei etwas Abstraktem wie bei Zahlen ziemlich subjektiv.

Zu 2/2:

- Er will uns eine Vorstellung näherbringen von solchen "neuen Zahlen", damit wir uns einmal etwas darunter vorstellen können, aber es braucht viel Phantasie dazu, denn unser Erfahrungsbereich reicht nicht an diese neue Zahlenmenge heran. Wir können uns nur vorstellen, daß es ganz andere Zahlen sind als die, die wir bisher gewohnt waren.

Zu 2/3:

- Ich stelle sie mir nicht mehr als Zahlen im herkömmlichen Sinn vor, wie z.B. Dezimalzahlen usw., sondern ich stelle mir eine Schreibweise vor, die uns möglicherweise gar nicht an Zahlen erinnert. Gleichzeitig lasse ich aber nie die Möglichkeit außer Betracht, daß es solche Zahlen nicht gibt, denn die Natur steckt voll von Unregelmäßigkeiten.

Zu 2/5:

- Zahlen wurden nur für etwas, das existiert, erfunden, deshalb kann es auch "neue Zahlen" geben.

- Diese neuen Zahlen existieren, aber erst seit sie von Menschen erfunden worden sind.

- Zahlen gibt es; die sind von niemandem erfunden oder entdeckt worden. Es gibt sie einfach in der Natur.

Zu 3/3:

- Ja, denn durch die neue Schreibweise (Symbole) kann man sich unter den neuen Zahlen etwas vorstellen. Ich finde, daß auch die Vorstellung, daß diese Zahlen auf einer Zahlenebene liegen, hilft, sich die Zahlen besser vorstellen zu können.

Zu 3/4:

- Meiner Meinung nach müssen Zahlen auf einer Zahlengeraden liegen, denn dann kann man sie sich besser vorstellen.

- Ich bin für die Zahlenebene, denn die Zahlen haben auf der Geraden kaum Platz, weil sie ja weder negativ noch positiv sein können.

Zu 3/5:

- Für mich ist durch die Gewohnheit die Bruchzahl zu einer Zahl geworden. Genauso kann ich mir vorstellen, daß ich mich an dieses Zahlenpaar als eine Zahl gewöhnen könnte.

- Ich kann mir nicht vorstellen, daß z.B. $\frac{12}{13}$ keine Zahl ist, aber 12:13 ist keine Zahl, wegen Rechenzeichen.

- Ich kann ein Zahlenpaar kaum als eine neue Zahl sehen, obwohl mir das bei den Bruchzahlen möglich ist. Die Bruchzahlen haben wir allerdings am Anfang als eine neue Zahl kennengelernt und die Vorstellung als Zahlenpaar ist neu; eine Umkehrung dieser Vorstellung bei den "neuen Zahlen" fällt mir daher schwer; außerdem kennen wir sie als eine neue Zahl noch nicht.

Zu 4/4:

- Vielleicht, weil wir bis jetzt noch nicht viel von ihnen wissen; es könnte sein, daß es ganz von uns abhängt, ob wir ihre Existenz bejahen oder nicht.

Zu 4/6:

- Es klingt eigentlich irgendwie fremd für einen Außenstehenden.

- Nein. Für mich existiert ein Objekt erst, wenn es Beweise dafür gibt, oder wenn ich fest daran glaube, daß es existiert.

Zu 5/1:

- Nicht die Existenz, sondern die Nützlichkeit ist in der Mathematik entscheidend.

- Daß ich erkannt habe, daß "existieren" eigentlich das Wort ist, an dem alles scheitert.

- Für mich war es wichtig, über dieses Problem zu sprechen und die "Zahlen" einfach in den Raum zu stellen, ob es sie nun gibt oder nicht.

Zu 5/3:

- Ich habe gesehen, daß es wahrscheinlich noch viel mehr gibt als ich mir vorstellen kann; daß wir teilweise in einer ziemlich engstirnigen und eingleisig denkenden Welt leben. Ich möchte lernen, für alles, was auf mich zukommt, immer offen zu sein, keine Vorurteile darüber zu haben und es nicht für unmöglich zu halten, nur weil es außerhalb meines Erfahrungsbereiches liegt.

- Ich bin um eine Rechenregel oder um eine Erkenntnis "reicher"!

- Also ich glaube, von "i" habe ich nicht viel Nutzen. Anders ist es mit dem "selbständigen Denken" über ein mathematisches Problem. Ich hätte nie geglaubt, daß so etwas in der Mathematikstunde funktioniert.

- Über die Mathematik habe ich wenig gelernt, aber über das Verständnis für die Mathematik habe ich einiges gelernt.

Zu 5/4:

- Finde ich sehr wichtig, denn prinzipielle Überlegungen vergißt man auch nicht so schnell wie einen formalen Rechenvorgang. Außerdem ist es viel interessanter.

Zu 5/6:

- Diese Art der Mathematik finde ich sehr interessant, da man herausgefordert wird, am Gegebenen zu zweifeln und nicht einfach alles widerspruchslos aufzunehmen.

- Am Anfang war ich eigentlich erstaunt, daß es in der Mathematik noch immer solch Streitereien geben sollte. Mir ist dadurch die Mathematik irgendwie nähergerückt, sozusagen "menschlicher" geworden.

Literatur:

Friedrich WAISMANN: Einführung in das mathematische Denken
Gerold & Co., Wien, 1936, Neuauflage erst kürzlich?
vor allem: Kapitel 16

Imre LAKATOS: Beweise und Widerlegungen
Friedrich Vieweg & Sohn, Band 14 der Serie Wissenschaftstheorie, Wissenschaft und Philosophie
vor allem: Kapitel 1 und Anhang 2 + Fußnoten

Walter Warwick SAWYER: Eine konkrete Einführung in die abstrakte Algebra
BI-Hochschultaschenbücher, Band 492/492a
vor allem: Kapitel V

MATHEMATIK

Bildungs- und Lehraufgabe:

Der Unterricht in Mathematik soll zum Erreichen der folgenden Ziele beitragen, die sowohl fachspezifische wie fächerübergreifende Aspekte enthalten:

Mathematisches Wissen und Können.

Die Schüler sollen
- grundlegende Kenntnisse, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einsichten in den Stoffgebieten Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik erwerben und verwenden können,
- mit mathematischen Methoden und Denkweisen vertraut werden,
- ein Bild der Mathematik gewinnen, das Verfahrens-, Problem-, Anwendungs- und Theorieaspekte ausgewogen repräsentiert,
- mit der Verwendung geeigneter mathematischer Texte und Arbeitsmittel, insbesondere elektronischer Rechengeräte vertraut werden.

Anwenden von Mathematik.

Die Schüler sollen
- ihr mathematisches Wissen und Können in verschiedenen Bereichen, insbesondere in solchen, die zu ihrer Lebens- und Wissenswelt Bezug haben, anwenden können,
- Mathematik als nützliches Werkzeug zur Lösung von Alltagsproblemen erkennen,
- Einsichten in Probleme des Anwendens von Mathematik — wie Probleme des Bildens von mathematischen Modellen — gewinnen.

Allgemeine mathematische Fähigkeiten.

Im Zusammenhang mit dem Erwerb von mathematischem Wissen und Können und dem Anwenden von Mathematik sind folgende Lernziele anzustreben:
- Argumentieren und exaktes Arbeiten.
  Insbesondere: präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren); Arbeiten unter bewußter Verwendung von Regeln; Begründen (Beweisen); Vollständigkeit einer Argumentation überblicken; Erkennen logischer Strukturen; Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform).
- Darstellen und Interpretieren.
  Insbesondere: verbales, formales und graphisches Darstellen von Sachverhalten; Deuten von formalen Begriffen durch Belegen mit Vorstellungen und Inhalten; Wechseln von Darstellungsformen; Herauslesen von Eigenschaften und Beziehungen aus Darstellungen.
- Produktives geistiges Arbeiten.
  Insbesondere: Kombinieren von vertrauten Methoden; Analysieren von Problemen, Begründungen, Darstellungen oder mathematischen Objekten; Anwenden bekannter Verfahren in teilweise neuartigen inner- oder außermathematischen Situationen; Abstrahieren und Konkretisieren, Verallgemeinern und Spezialisieren, Analogisieren und Kontrastieren.

- Kritisches Denken.
  Insbesondere: Überprüfung von Vermutungen, von Ergebnissen; Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen; Erkennen der beschränkten Gültigkeit von Aussagen, Feststellen von Voraussetzungen; Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle.

Reflektieren über Mathematik und mathematische Arbeitsweisen.

Die Schüler sollen beispielsweise
- Probleme des Definierens, Beweisens, der Exaktheit erkennen,
- Problemlösestrategien bewußt verwenden,
- die Veränderlichkeit mathematischer Begriffe in der historischen und in der persönlichen Entwicklung kennenlernen,
- Beziehungen und Abgrenzungen zu anderen Erlebens- und Wissensbereichen herstellen,
- sich mit der Bedeutung mathematischen Tuns für sie selbst auseinandersetzen.

Persönlichkeits- und Sozialentwicklung.

Die Schüler sollen befähigt werden
- sorgfältig, konzentriert, planmäßig und überlegt zu arbeiten,
- gesetzmäßig zu denken, klare Begriffe zu bilden, sinnvolle Fragen zu stellen sowie kontrolliert zu abstrahieren und zu verallgemeinern,
- Informationsquellen sachgerecht zu nutzen,
- selbständig Wissen zu erwerben.
- Darstellungsformen, die zur Beschreibung konkreter wie abstrakter Sach- und Denkverhalte erforderlich sind, zu verwenden oder zu entwickeln,
- mit rationalen Denkweisen Situationen zu untersuchen und Probleme sachgerecht zu bearbeiten, dabei aber Grenzen des Anwendens solcher Denkweisen zu erkennen,
- Einsichten in grundlegende wissenschaftliche Verfahrensweisen und Denkvorstellungen zu gewinnen,
- kritisches Denken zu entwickeln und gegenüber verschiedenen Standpunkten und Sichtweisen offen zu sein,
- ihre Kommunikationsfähigkeit zu entwickeln,
- sowohl selbständig als auch kooperativ zu arbeiten,
- Freude an kreativem Verhalten und intellektuellen Leistungen zu gewinnen.

Arbeiten mit komplexen Zahlen:

Berechnen von komplexen Lösungen quadratischer Gleichungen mit reellen Koeffizienten; Untersuchen der Lösungsfälle. Rechnen mit komplexen Zahlen insbesondere in der Form $a + b\,i$. Untersuchen der Gültigkeit von Rechengesetzen. Darstellen der Addition und Subtraktion in der Zahlenebene.

A l l e n f a l l s Darstellen komplexer Zahlen in Polarform. Geometrisches Deuten von Multiplikation und Division. Arbeiten mit Potenzen komplexer Zahlen und Lösen von Gleichungen der Form $x^n = a$ mit $a \in C$. Beschreiben von physikalischen Vorgängen mit komplexen Zahlen.

(— Grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten, Darstellen und Interpretieren)

A l l e n f a l l s Konstruktion von Zahlbereichen:

Kennen grundlegender Ideen der Erweiterung von Zahlbereichen und Gewinnen von Einsichten in Probleme von Zahlbereichserweiterungen. Behandeln von Existenzfragen. Konstruktion der komplexen Zahlen.

(— Vertiefte Kenntnisse und Einsichten, Reflektieren über Mathematik)